

Geradenspiegelungen

Vor allem für die Klassenstufen 6 und 7 gedacht

Datei Nr. 11052

Stand: 3. Oktober 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

Geradenspiegelungen sind ein sehr wichtiges Hilfsmittel in der Geometrie.

Zur Ergänzung werden im Abschnitt 3.5 auch die Schrägspiegelungen besprochen.

Diese werden im Unterricht nur selten besprochen.

Zur Symmetrie von Vierecken findet man sehr vieles im Text 11211. Dort gibt es zusätzliche Hinweise, wie auch Konstruktionsbeispiele und ein Übersichtsblatt über symmetrische Vierecke (Seite 38).

Einige Abbildungen wurden mit **MatheGrafix** Version 10 erstellt.

Die zugehörigen Dateien werden unter der Datei mgf-11052.zip im Ordner Mathegrafiken auf der Mathe-CD zur Verfügung gestellt.

Hier wird noch nicht besprochen, das man eine Doppelspiegelung (also zwei aufeinander folgende Geradenspiegelungen) durch eine Drehung oder eine Verschiebung ersetzen kann.

Dies wird im Text 11059 besprochen.

Inhalt

1	Einführung	3
2	Konstruktion von Spiegelbildern	4
2.1	Konstruktion von Bildpunkten mit dem Geodreieck	4
2.2	Konstruktion von Bildpunkten mit dem Zirkel	8
2.3	Konstruktion von Bildgeraden	11
2.4	Fixgeraden bei Geradenspiegelungen	16
3	Suchen einer Spiegelungsachse	17
3.1	Wo liegt die Spiegelungsachse von 2 Punkten?	17
3.2	Ist eine Strecke CD das Spiegelbild einer Strecke AB?	17
3.3	Welche Figuren sind zueinander symmetrisch?	18
3.4	Welche Figuren sind (in sich) symmetrisch?	20
	Symmetrische Dreiecke	21
	Symmetrische Vierecke	22
3.5	Schrägspiegelung und Schrägsymmetrie	24

1 Einführung

Abbildung 1 zeigt ein Glasfenster, das am Rand an einer Stange drehbar befestigt ist.

Man kann es um diese Achse nach links drehen.

Auf dieses Fenster ist ein gelbes Dreieck aufgeklebt, das man dann nach der Drehung natürlich auch in die linken Endposition sehen kann. Man schaut dann aber von hinten auf das Dreieck.

Diese Drehung hat zur Folge, dass sich der sogenannte **Umlaufsinn** des Dreiecks ändert, wie man in Abb. 2 sieht.

Im Urbild, also im Dreieck ABC, erfolgt der Umlauf von A über B nach C gegen den Uhrzeigersinn, im Bilddreieck A'B'C' erfolgt der Umlauf von A' über B' nach C' im Uhrzeigersinn.

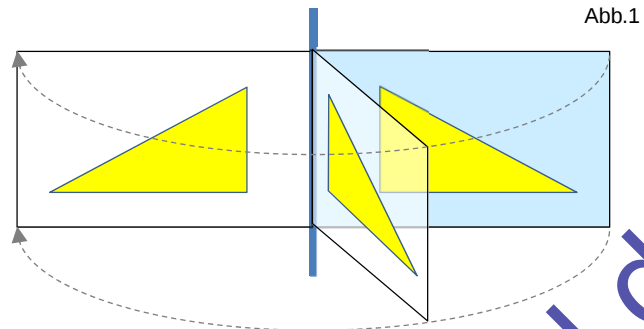


Abb.1

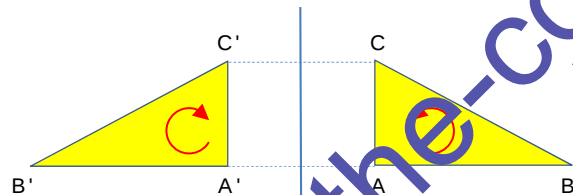


Abb.2

Alle anderen Eigenschaften der beiden Dreiecke sind gleich geblieben:

Die Längen der Dreiecksseiten,
die Größen der Dreieckswinkel und
der Flächeninhalt haben sich bei dieser Abbildung nicht verändert.

Man nennt die Abbildung, die ABC nach A'B'C' abbildet, eine Geradenspiegelung.

Das hat einen einfachen Grund, den man als Person selbst nachvollziehen kann:

Man stelle sich mit dem Rücken vor einen großen Spiegel.
Dann drehe man sich um 180° (wie oben das Glasfenster).
Daraufhin schaut man in den Spiegel und sieht dort sein Spiegelbild.
Dabei sind (wegen dieser Drehung) links und rechts vertauscht:
Zwinkert man mit dem rechten Auge, dann zwinkert im Spiegelbild das linke;
wenn man sich gedanklich in die Spiegelbildperson hinein versetzt.

Es gibt eine beliebte Denkfrage hierzu:

Warum vertauscht der Spiegel links und rechts, aber nicht oben und unten?

Die Antwort mag vielen verblüffend erscheinen: Die Vertauschung machen wir, wenn wir uns wie geschildert mit dem Rücken vor den Spiegel stellen und uns dann um 180° drehen, damit wir uns sehen können. Weil wir uns dabei um eine vertikale Achse drehen, erscheinen dann natürlich links und rechts vertauscht.

Wir könnten auch auf sportlichere Weise eine Drehung um eine horizontale Achse ausführen. Das würde bedeuten, dass wir mit dem Rücken zum Spiegel stehen, uns dann tief nach vorne beugen und einen Handstand machen. Dann können wir auch wieder in den Spiegel schauen (wenn er hinreichend groß ist). Dann aber sehen wir uns auf dem Kopf stehend, und unser Kopf ist natürlich unten, d. h. jetzt sind unten und oben vertauscht.

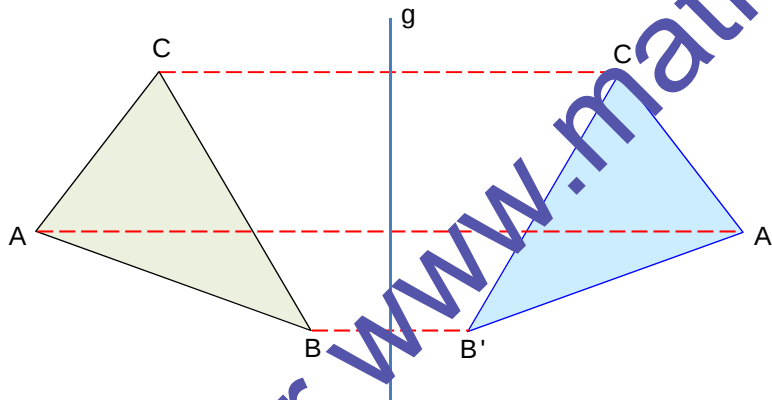
2 Konstruktion von Spiegelbildern

2.1 Konstruktion von Bildpunkten mit dem Geodreieck

Wenn man sich wieder das Drehungsmodell mit der Glasscheibe vor Augen hält, dann kann man folgender Aussage zustimmen:

1. Bei einer Spiegelung an einer Geraden, liegen Urbild und Bildpunkt auf einer Senkrechten (Lotgeraden) zur Achse.
2. Punkt und Bildpunkt haben von der Achse denselben Abstand.
Man könnte es auch so formulieren:
Die Achse halbiert die Verbindungsstrecke zwischen Urbild und Bildpunkt.

Beispiel: Spiegelung eines Dreiecks ABC an einer Geraden g:



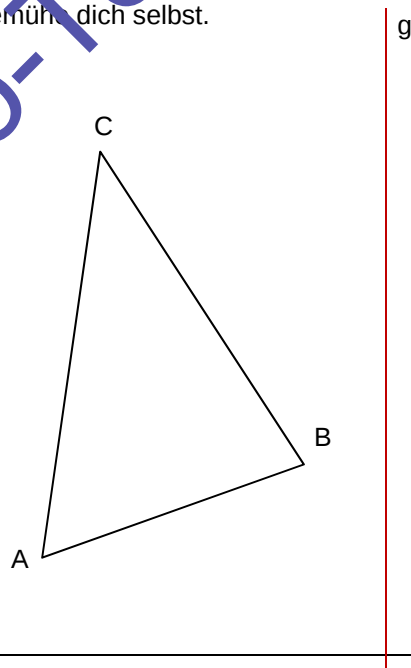
Man kann die genannten Eigenschaften nachvollziehen.

Aufgabe 1

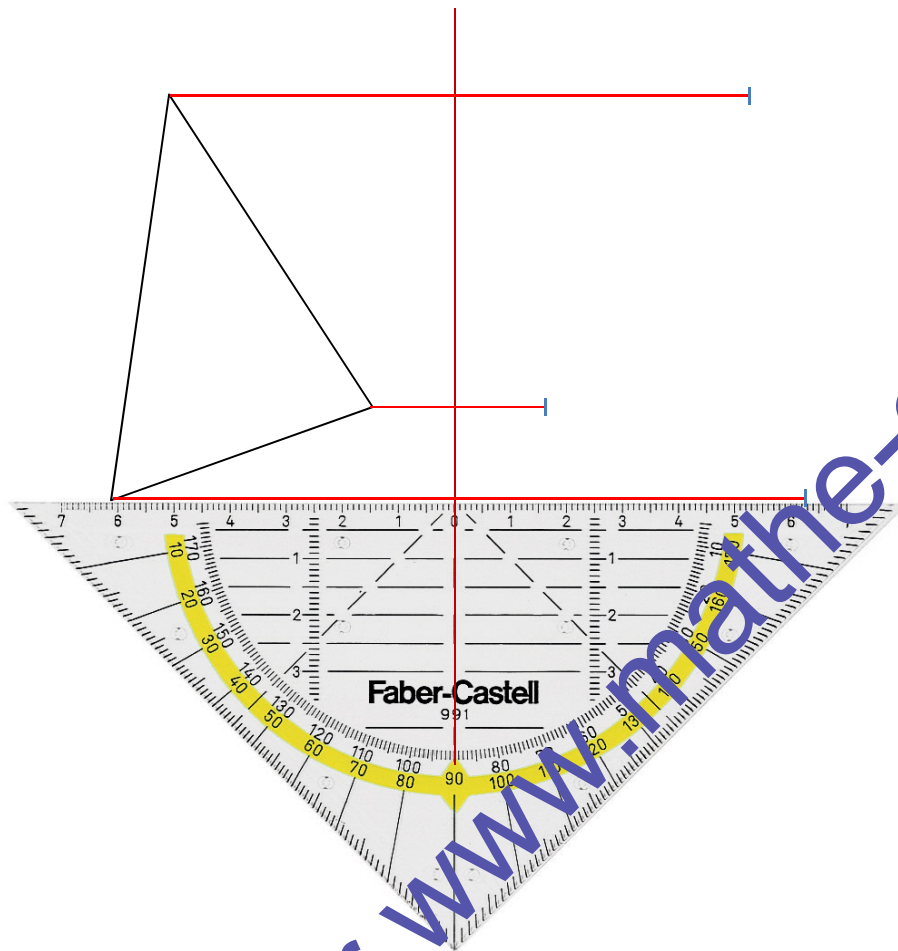
Versuche nun selbst, ein Dreieck zu spiegeln. Nimm etwa diese Vorlage (ausgedruckt) oder selbst abgezeichnet (kein kariertes Papier verwenden).

Auf der nächsten Seite erkläre ich dann, wie man es machen kann.

Doch zuerst bemühe dich selbst.

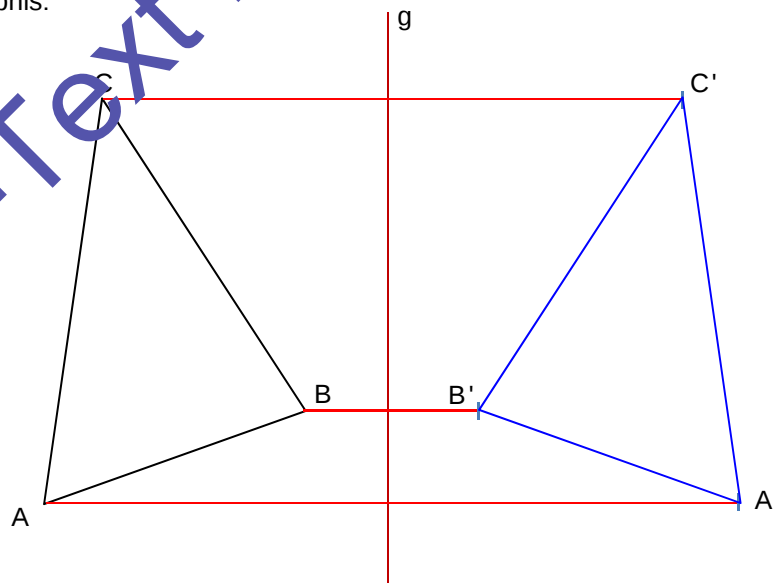


Lösung Aufgabe 1:

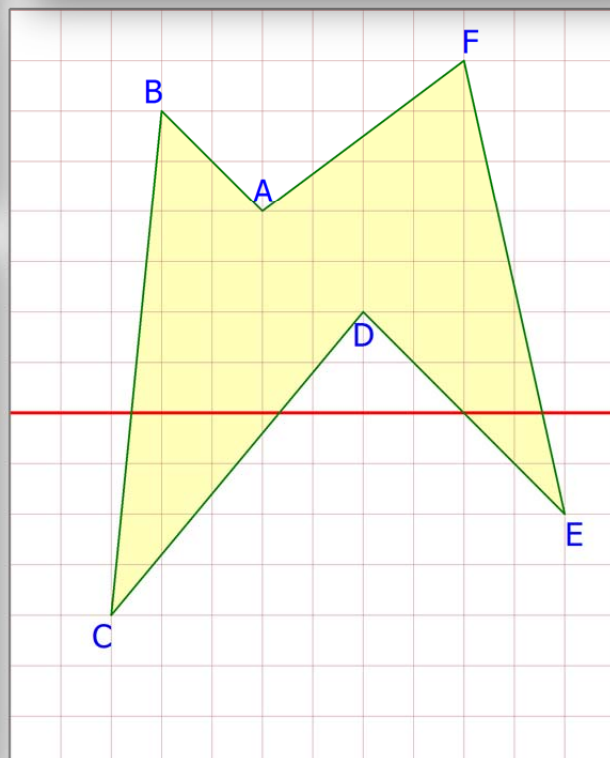
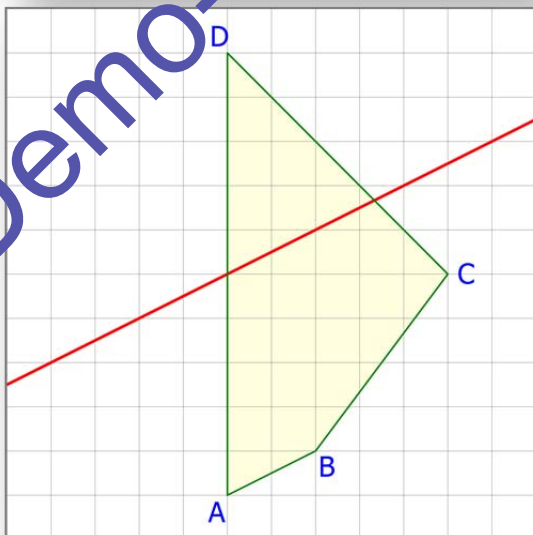
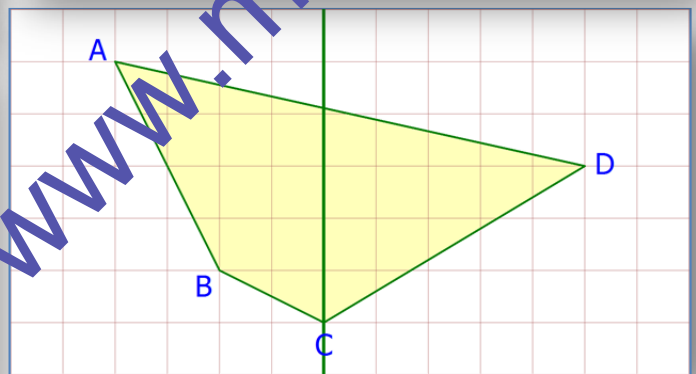
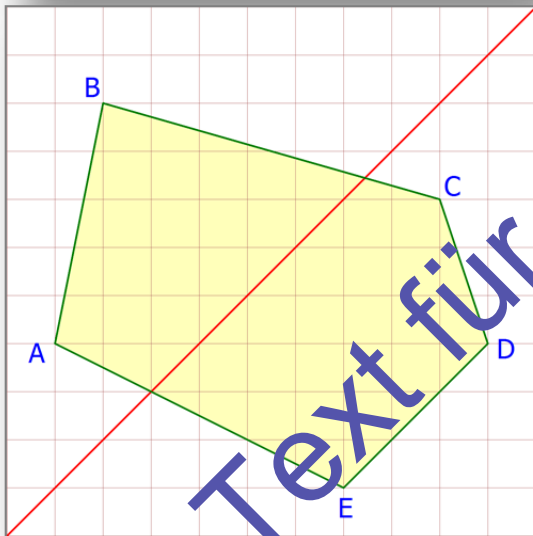
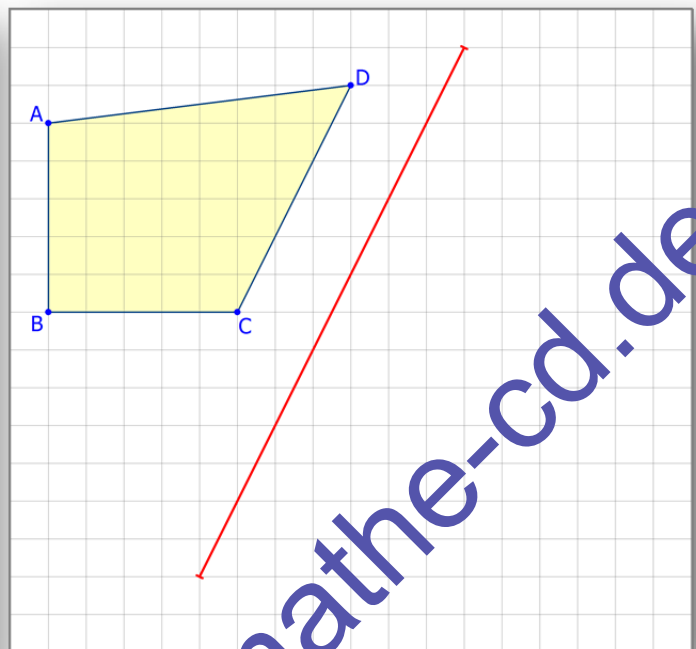
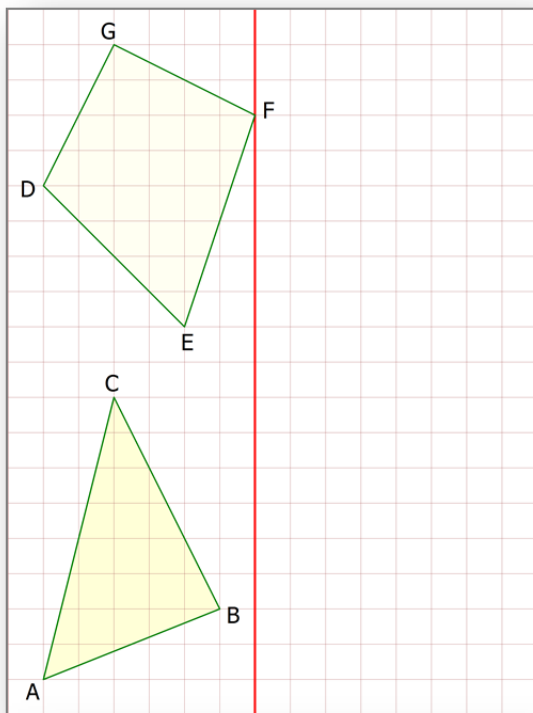


Man kann mit einem Geodreieck ganz einfach eine Senkrechte zur Spiegelachse g zeichnen und dann auch die Abstände links ablesen und rechts markieren.

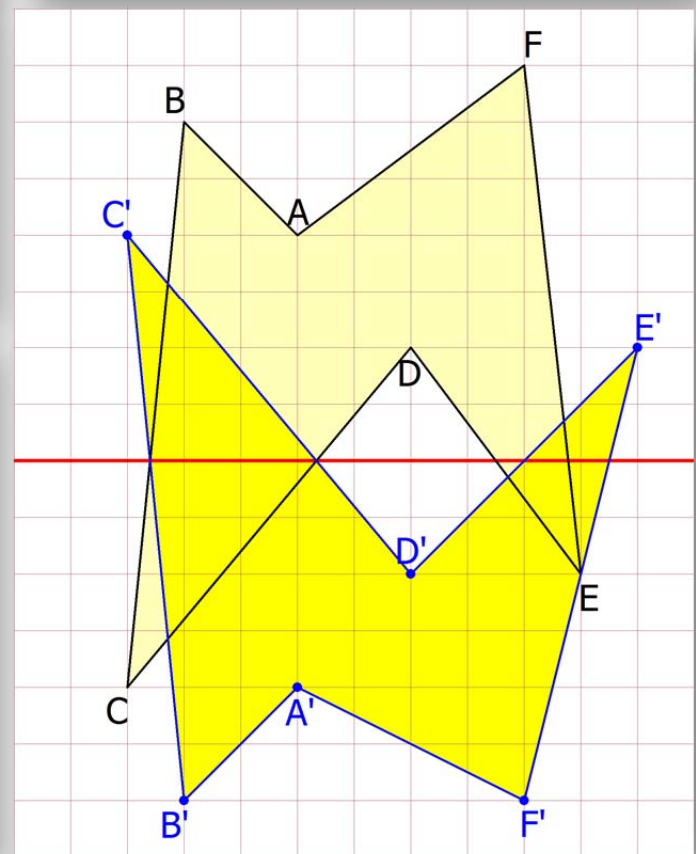
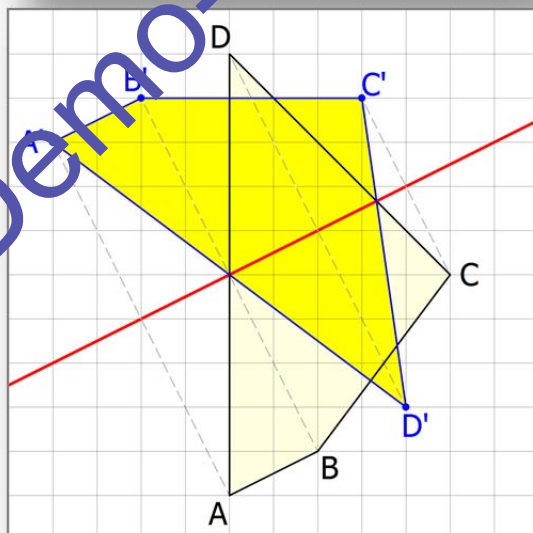
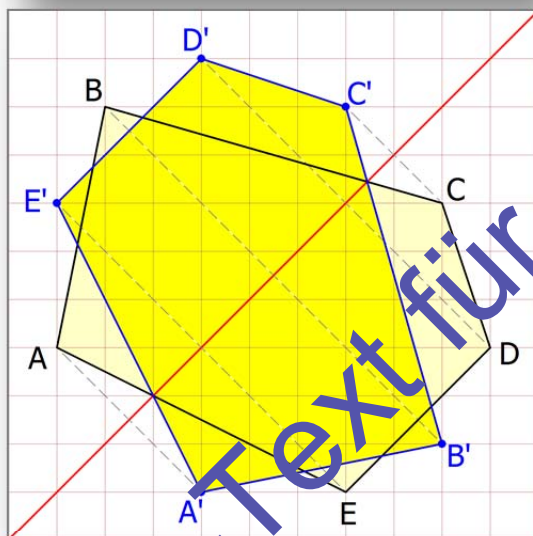
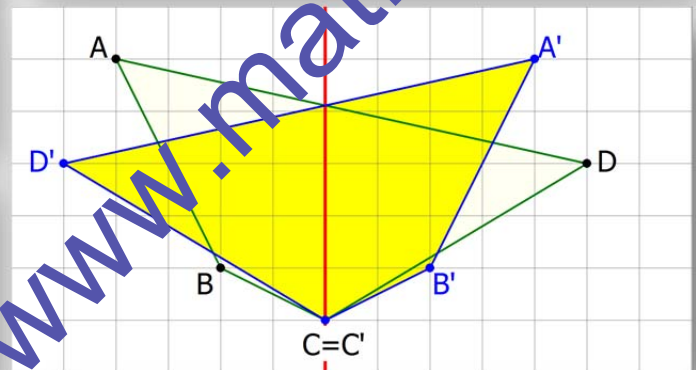
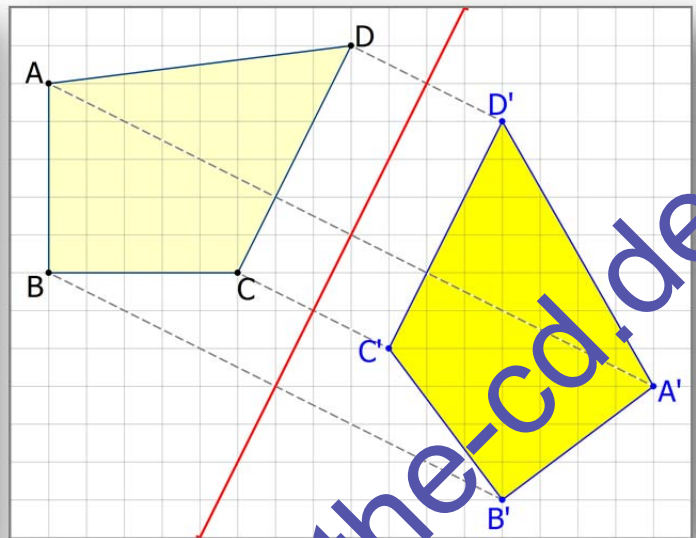
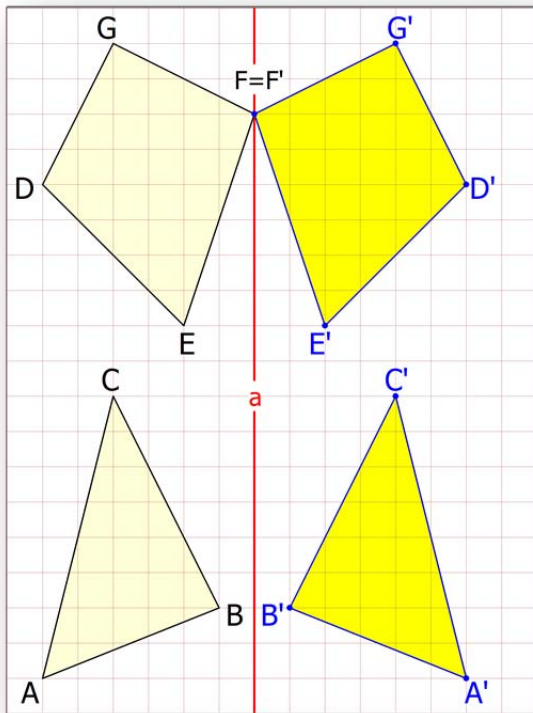
Hier das Endergebnis:



Übungsblatt 1: Spiegelbilder im Gitternetz eintragen

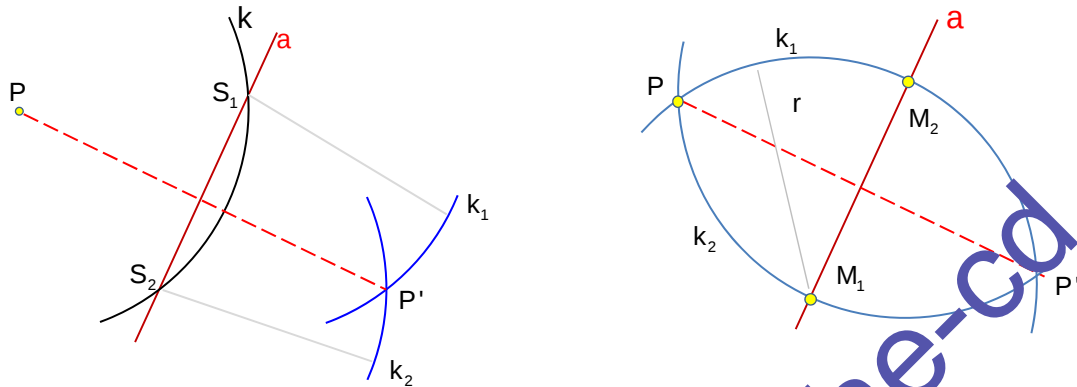


Lösungen



2.2 Konstruktion von Bildpunkten mit dem Zirkel

Die Konstruktion durch Anlegen eines Geodreiecks und Abmessen der Abstände ist eine gute Möglichkeit. Es gibt jedoch eine genauere Konstruktionsmethode, die jetzt vorgestellt wird.



Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben sind der Punkt P (das Urbild) und die Achse a, an der P zu spiegeln ist.

Linke Konstruktion: **Dreikreis-Figur**

1. Zeichne um P einen Kreisbogen k, so dass er die Achse a in zwei (nicht zu eng beieinander liegenden) Punkten S_1 und S_2 schneidet.
2. Zeichne dann um beide Schnittpunkte je einen Kreisbogen (k_1 und k_2), beide mit dem gleichen Radius wie schon k (graue dünne Linie). Diese schneiden sich zweimal: in P und in dem gesuchten Bildpunkt P' .

Rechte Konstruktion: **Zweikreis-Figur**

1. Wähle auf a einen Mittelpunkt M_1 für einen Kreisbogen k_1 durch P und einen zweiten Mittelpunkt M_2 für einen zweiten Kreisbogen k_2 durch P. (Die beiden Radien dürfen verschieden groß sein.)
2. Diese beiden Kreisbögen schneiden sich im Bildpunkt P' .

Diese Konstruktionen liefern den richtigen Bildpunkt, was man erkennt, wenn man eine solche Figur mit kompletten Kreisen zeichnet.

Diese sogenannte **Vierkreisfigur** besteht aus 4 Kreisen mit gleichen Radien.

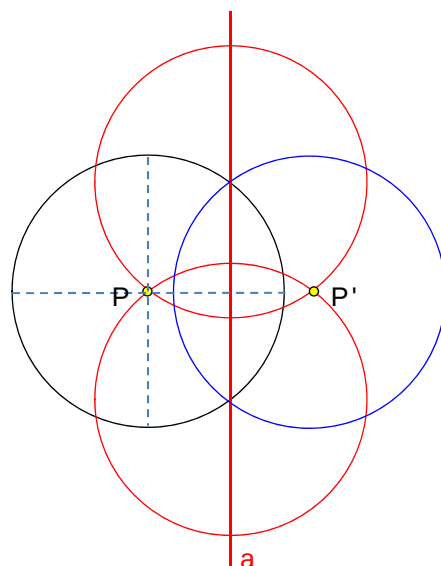
Der erste Kreis wird um P eingezeichnet (gestrichelte Linien im Kreis). Rechts ergibt sich dann der Bildpunkt P' . Man erkennt, dass die links von der senkrechten Achse a eingezeichnete Teil durch „Umkappen“ (Drehung im Raum) auf die rechte Hälfte fällt.

Dies zeigt, dass die Darstellung zu einer Spiegelung führt.

Man kann nun die unnötigen Linien weglassen und hat dann die oben geschilderte Konstruktion.

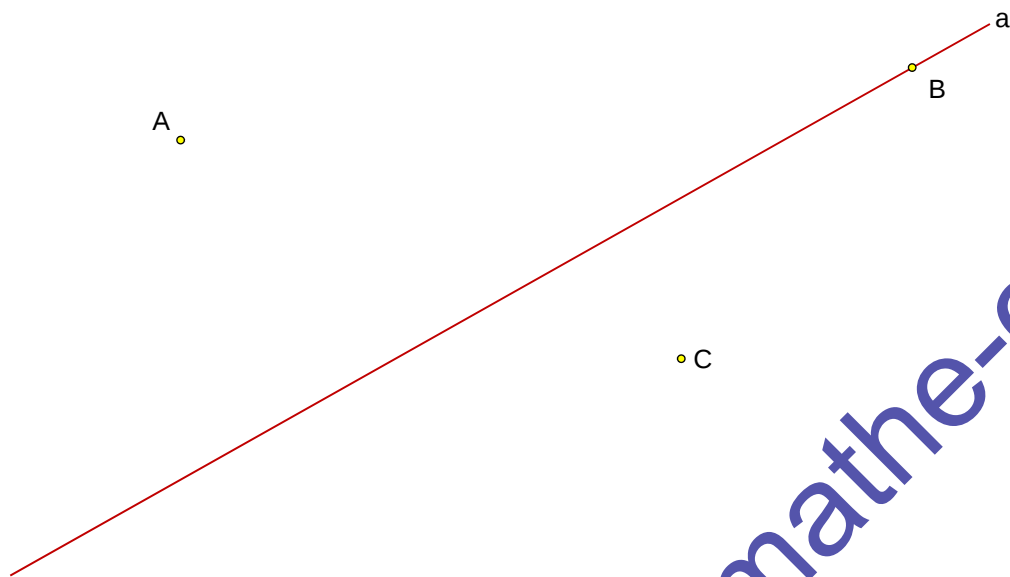
Nun wird es wichtig, dass man einige dieser Konstruktionen durchführt.

Drucke die Folgeseite aus und übe damit.



Übungsblatt 2: Geradenspiegelungen

- a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Bildpunkte zu den eingezeichneten Punkten:



- b) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Eckpunkte des Bilddreiecks.

